

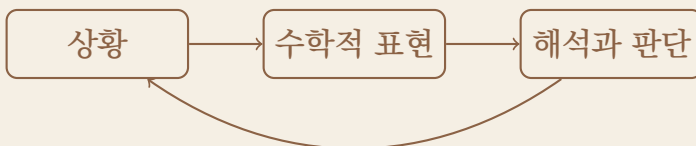
Enjoying Math Series

수학이 무서운 사람을 위한

완전 초보 수학

개정증보판·개념 연결 해설

직관에서 정의로, 계산에서 구조로



개정증보판을 펴내며

수학을 처음 배우는 독자에게 필요한 것은 쉬운 말만이 아니다. 왜 그런 정의
를 택했는지, 계산 결과가 무엇을 말하는지, 다음 개념이 앞선 개념에서 어떻
게 자라나는지를 함께 보여 주어야 한다. 반대로 전공자에게 필요한 것은 어려
운 기호의 양이 아니라 초등적인 생각 속에 숨어 있는 구조를 정확히 드러내는
일이다.

이 해설은 본책의 순서를 바꾸지 않는다. 대신 각 장의 핵심을 네 층으로 다
시 비춘다. 먼저 일상 언어로 직관을 붙잡고, 이어 정의와 수식으로 압축한다.
계산이 끝나면 결과를 원래 상황에 되돌려 읽고, 마지막에는 같은 생각이 대학
수학과 실무에서 어디까지 이어지는지 살핀다. 독자는 자신의 목적에 맞춰 층
을 선택하면 된다.

이 책을 읽는 한 가지 리듬

상황을 한 문장으로 설명한다. → 대상을 정하고 기호를 붙인다. → 계산
한다. → 단위와 범위를 확인한다. → 답을 다시 문장으로 쓴다.

이 책의 표기 약속

표기는 짧아야 하지만 뜻을 감추어서는 안 된다. 별도 설명이 없을 때는 다음 약속을 따른다.

수의 집합	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}$ 는 정수, $\mathbb{Q}$ 는 유리수, $\mathbb{R}$ 은 실수, $\mathbb{C}$ 는 복소수의 집합이다. 0 을 자연수에 포함하는 문헌도 있으므로 다른 책을 읽을 때는 정의를 확인한다.
구간	$[a, b]$ 는 양 끝을 포함하고, (a, b) 는 포함하지 않는다. $[a, b)$ 처럼 한쪽만 포함할 수도 있다. 무한대는 수가 아니므로 ∞ 쪽에는 항상 등근 괄호를 쓴다.
로그	$\log x$ 는 밑 10 의 상용로그, $\ln x$ 는 밑 e 의 자연로그다. 밑이 다르면 $\log_b x$ 처럼 적는다. 실수 로그의 진수는 양수다.
크기 기호	$ x $ 는 수의 절댓값이고, $ A $ 또는 $n(A)$ 는 유한집합의 원소 수다. 같은 모양의 기호도 대상에 따라 뜻이 달라진다.
벡터와 행렬	벡터는 $\mathbf{x}$, 행렬은 A 처럼 쓴다. $\mathbf{x}^T$ 는 전치이고, A^{-1} 은 존재할 때의 역행렬이다.
등호와 근사	정확히 같을 때 $=$, 반올림하거나 추정했을 때 $\approx$ 를 쓴다. 중간 계산은 가능한 한 정확값을 유지하고 마지막에 상황에 맞게 반올림한다.
단위	답에는 원, 명, km/h 처럼 문제의 단위를 붙인다. 식을 더하거나 비교할 때는 단위를 먼저 맞추며, 그래프의 축에도 변수와 단위를 함께 적는다.

차례

이 책의 표기 약속	ii
제 1 부 장별 개념 다리	1
1. 수학적 사고의 출발점	1
2. 집합과 경우의 수	2
3. 순열과 조합	3
4. 확률의 언어	4
5. 조건부확률과 독립	5
6. 기대값	6
7. 방정식과 복소수	7
8. 함수와 역함수	8
9. 직선과 포물선	9

10. 다항함수와 유리함수	10
11. 지수와 로그	11
12. 성장·감소 모델	12
13. 금융수학	13
14. 행렬	14
15. 선형계획법	15
 제 2 부 그림으로 보는 핵심	 16
집합을 논리로 읽는 그림	16
조건부확률과 줄어든 분모	17
함수는 화살표의 규칙	18
기울기와 곡률을 구별하기	19
선형 성장과 지수 성장	20
행렬은 공간을 바꾼다	21
가능영역과 최적 꼭짓점	22

제 3 부 끝까지 푸는 예제	23
택시요금: 질문을 모델로 바꾸기	23
언어 집합: 포함배제로 중복 다루기	24
발표자 선택: 같은 결과를 센 횟수	25
주사위 합: 등가능성부터 확인하기	26
진단검사: 결과를 거꾸로 읽기	27
두 선택: 평균만으로 결정하지 않기	28
유리방정식: 원래 식으로 돌아가기	29
온도 변환: 과정을 복원하는 함수	30
구독비용: 매개변수를 문장으로 읽기	31
다항함수: 근의 중복도가 만든 모양	32
세균 성장: 지수를 꺼내는 로그	33
이용자 증가: 두 모델의 장기 예측	34
현재가치: 서로 다른 시점 비교하기	35
판매량 행렬: 차원을 먼저 읽기	36
생산계획: 최적값과 병목 찾기	37

제 4 부 개념 사이의 연결	38
경우의 수에서 확률로	38
기대값에서 선택으로	39
방정식에서 함수로	40
그래프에서 모형으로	41
행렬에서 최적화로	42
제 5 부 기호와 엄밀성	43
집합과 확률의 기호 읽기	43
식과 함수의 기호 읽기	44
행렬과 최적화의 기호 읽기	45
개념 연결 지도	46
방정식: 동치를 지키는 변형	47
확률: 0 과 불가능은 다르다	48
독립: 정보가 확률을 바꾸지 않을 때	49
확률과 통계는 반대 방향으로 걷는다	50

역함수: 정의역까지 되돌리기	51
로그: 식을 합쳐도 정의역은 남는다	52
최적화: 꼭짓점 원리의 조건	53
최적값 뒤의 그림자가격 읽기	54
 제 6 부 풀이 확인과 학습 경로	 55
2 장 집합과 셈: 풀이 확인	55
3 장 순열과 조합: 순서 판단	56
4 장 확률: 표본공간 점검	57
5 장 조건부확률: 분모 다시 보기	58
6 장 기대값: 순이익 계산	59
7 장 방정식과 복소수: 대입 계산	60
8 장 함수: 정의역과 역연산	61
9 장 직선과 포물선: 좌표 확인	62
10 장 다항·유리함수: 근과 점근선	63
11 장 지수와 로그: 역관계 검토	64

12 장 성장모델: 단위와 근삿값	65
13 장 금융수학: 현금흐름 정렬	66
14 장 행렬: 차원과 곱셈 점검	67
15 장 선형계획: 꼭짓점 비교	68
곱셈원리와 확률적 독립은 다르다	69
낮선 문제의 출발점을 고르는 지도	70
세 독자를 위한 읽기 경로	71
한 문제를 네 번 읽는 학습법	72
주장과 증명을 분리해 읽기	73
도미노처럼 이어지는 수학적 귀납법	74
제 7 부 더 깊은 수학의 문	75
모형의 숫자를 믿는 범위	75
역행렬과 계산의 안정성	76
그래프는 축 위에 놓인 주장이다	77
평균변화율에서 순간변화율로	78

작은 합에서 적분으로	79
다항식의 근은 구조를 드러낸다	80
정확값과 근삿값을 구별하기	81
이율은 기간과 함께 읽는다	82
‘모든’과‘어떤’의 논리	83
단위는 계산을 감시하는 문법이다	84
상관관계는 인과관계의 증거가 아니다	85
신뢰구간이 말하는 것	86
이산확률과 연속확률	87
제 8 부 진단과 용어	88
논리와 자료를 가르는 다섯 문장	88
논리와 자료의 진단 문항 해설	89
계산 전에 멈춰 볼 다섯 문장	90
불확실성과 관계를 가르는 다섯 문장	91
수와 식의 진단 문항 해설	92

확률과 모형의 진단 문항 해설	93
수학 문장의 역할을 가르는 말	94
모형과 계산을 가르는 말	95
문제를 푼 뒤 반드시 묻는 다섯 질문	96

1. 수학적 사고의 출발점

수학은 답을 빨리 내는 기술이 아니라, 무엇을 같게 보고 무엇을 구별할지 정하는 언어다.

질문을 받자마자 계산하지 말고 세 가지부터 적는다. 대상은 무엇인가, 알고 있는 것은 무엇인가, 구하려는 것은 무엇인가. 이 구분만으로도 많은 문제가 절반쯤 풀린다. 기호는 생각을 대신하지 않는다. 생각의 뼈대가 잡힌 뒤 그것을 짧고 정확하게 보관한다.

전공으로 이어지는 관점

수학적 모델은 현실 그 자체가 아니다. 현실에서 중요한 특징을 남기고 나머지를 버린 표현이다. 따라서 좋은 풀이에는 계산의 정확성뿐 아니라 가정의 적절성, 결과가 유효한 범위, 반례의 가능성이 함께 들어간다.

2. 집합과 경우의 수

집합은 대상을 담는 상자가 아니라, 어떤 대상을 같은 질문 아래 바라보겠다는 약속이다.

교집합은 두 조건을 동시에 만족하는 부분이고 합집합은 두 조건 중 적어도 하나를 만족하는 부분이다. “또는”을 일상어처럼 둘 중 하나만으로 읽으면 포함배제 원리에서 곧바로 오류가 난다.

식을 문장으로 읽기

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

두 번 센 부분을 한 번 되돌려 뺀다.

추상화의 한 걸음

지시함수 $1_A(x)$ 는 $x \in A$ 이면 1, 아니면 0 이다. 그러면 $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$ 가 된다. 집합의 셈이 함수의 대수로 바뀌는 순간이다.

3. 순열과 조합

선택의 핵심은 공식을 고르는 일이 아니라, 결과 두 개를 언제 같은 것으로 볼지 정하는 일이다.

좌석 배치처럼 순서가 바뀌면 결과가 달라지는가? 그렇다면 순열이다. 위원 선발처럼 구성원만 같으면 같은 결과인가? 그렇다면 조합이다. $r!$ 로 나누는 이유는 같은 조합 하나가 내부 순서만 달리해 $r!$ 번씩 중복 집계되기 때문이다.

식을 문장으로 읽기

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

n 개 중 r 개를 고르되, 뽑힌 순서와 뽑히지 않은 쪽의 순서를 지운다.

검산 습관

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ 가 성립해야 한다. r 명을 뽑는 일과 남을 $n-r$ 명을 정하는 일은 같은 선택이기 때문이다.

4. 확률의 언어

확률은 막연한 기대가 아니라, 가능한 결과에 일관된 무게를 배분하는 규칙이다.

“경우의 수로 나눈다”는 공식은 모든 결과가 같은 가능성을 가질 때만 안전하다. 실제 데이터에서는 결과의 빈도나 모델이 부여한 가중치가 다를 수 있다. 먼저 표본공간을 쓰고, 결과들이 등가능한지 확인한 뒤 사건을 부분집합으로 표시한다.

식을 문장으로 읽기

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\{\omega\})$$

사건의 확률은 그 사건에 속한 결과들의 확률을 모두 더한 값이다.

전공으로 이어지는 관점

연속적인 결과에서는 한 점의 확률이 0 일 수 있다. 이때 확률은 점의 개수가 아니라 구간 아래의 넓이, 더 일반적으로는 측도로 이해한다.

5. 조건부확률과 독립

새 정보가 들어오면 확률의 분포, 곧 우리가 바라보는 세계가 달라진다.

조건 B 를 알게 되었다는 것은 표본공간을 B 안으로 좁혔다는 뜻이다. 독립은 두 사건이 겹치지 않는다는 말이 아니라, 한 사건의 발생을 알아도 다른 사건의 확률이 바뀌지 않는다는 말이다.

식을 문장으로 읽기

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B 가 일어난 세계 안에서, 그중 A 도 일어난 몫을 본다.

자주 생기는 혼동

서로 배타적인 두 사건은 동시에 일어날 수 없다. 확률이 양수라면 한쪽의 발생은 다른 쪽을 불가능하게 만들므로 독립일 수 없다.

6. 기대값

기대값은 다음 한 번의 결과가 아니라, 같은 선택을 오래 반복했을 때의 중심이다.

값이 크더라도 확률이 작으면 기여가 작고, 값이 작더라도 자주 나오면 기여가 커진다. 그래서 기대값은 ‘값 × 확률’의 합이다. 의사결정에서는 기대값만 보지 말고 변동성, 최악의 손실, 반복 가능성도 함께 본다.

식을 문장으로 읽기

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x xP(X = x)$$

가능한 각 값에 그 값이 나타날 비중을 곱해 평균한다.

선형성

독립이 아니어도 $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ 이다. 복잡한 합의 평균을 개별 평균으로 쪼개는 매우 강력한 원리다.

7. 방정식과 복소수

방정식을 푼다는 것은 등식을 변형하는 일이 아니라, 그 등식을 참으로 만드는 값을 보존하며 찾아가는 일이다.

양변에 같은 수를 더하거나 0 이 아닌 같은 수를 곱하면 해집합이 보존된다. 반면 제곱하거나 미지수가 든 식을 곱하면 가짜 해가 생길 수 있다. 따라서 마지막 대입 검산은 선택이 아니라 풀이의 일부다.

복소수의 역할

$i^2 = -1$ 은 억지 약속이 아니다. 실수만으로 닫히지 않던 방정식의 세계를 덧셈과 곱셈에 대해 닫힌 더 큰 수 체계로 확장한다.

기하적 해석

$a + bi$ 는 평면의 점이자 크기와 방향을 가진 수다. 복소수의 곱셈은 크기를 곱하고 각도를 더하는 변환으로 읽힌다.

8. 함수와 역함수

함수는 계산식이 아니라 입력 하나에 출력 하나를 정하는 규칙이다.

정의역은 부록이 아니다. 같은 식이라도 정의역이 다르면 다른 함수다. 역함수는 계산을 뒤집는 장치이므로 서로 다른 입력이 같은 출력으로 모이면 만들 수 없다. 먼저 일대일성을 확인해야 한다.

식을 문장으로 읽기

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

먼저 g 로 바꾸고, 그 결과를 f 에 넣는다.

구조의 언어

함수의 합성은 여러 단계의 처리 과정을 하나로 묶는다. 데이터 파이프라인, 좌표변환, 신경망의 층도 같은 합성의 관점으로 읽을 수 있다.

9. 직선과 포물선

그래프는 식의 그림이 아니라, 두 양의 관계를 한눈에 검토하는 도구다.

기울기는 x 가 한 단위 변할 때 y 가 평균적으로 얼마나 변하는지를 나타낸다. 반드시 단위를 함께 읽어야 한다. 이차함수의 꼭짓점은 최대·최소만 주는 점이 아니라, 증가에서 감소로 또는 감소에서 증가로 행동이 바뀌는 경계다.

식을 문장으로 읽기

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

x 의 변화량 한 단위당 y 의 변화량이다.

현실 해석

절편이 수학적으로 존재해도 현실에서 의미가 없을 수 있다. 관측 범위 밖으로 그래프를 연장하는 외삽에는 언제나 모델 가정이 숨어 있다.