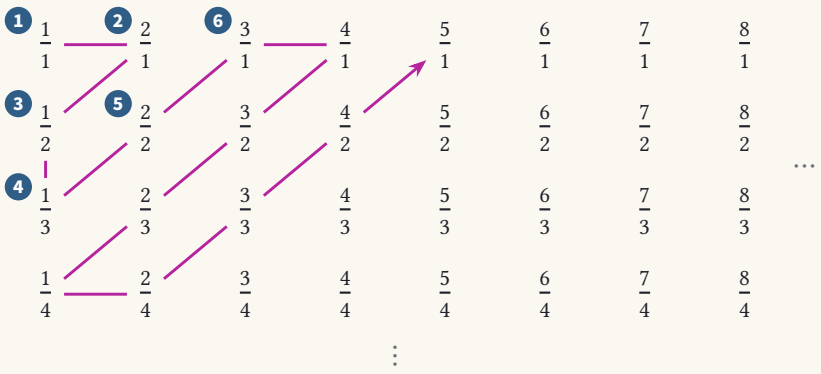
수즐 출판사

직장인과 문과생을 위한 수학교실

수학이 필요한 어른을 위한 대학 수학의 지도

상권 1강「집합과 명제, 공리」수록



1강의 질문 – 분수를 하나도 빠뜨리지 않고 셀 수 있을까?

수학자가 직장인·문과생과 함께한 열여섯 강의 대학 수학 수업,
그날의 판서와 목소리 그대로

조건희 지음

Geonhee Cho

지은이에 대하여

조건희

Geonhee Cho

미국 텍사스 주립대학교(Texas State University)에서 수학을 가르치고 연구하는 수학자다. 전공은 복소기하학과 확률론이며, 이를 양자컴퓨팅과 하드웨어에 구조적으로 접목하는 연구를 한다.

수학을 하는 이유를 물으면 “진심으로 이 세상에서 가장 재미있어서”라고 답한다. 대학에서 졸업에 필요해서 수업을 듣는 학생들을 가르치다가, 학점도 시험도 없는데 주말에 스스로 찾아와 수학을 배우겠다는 어른들을 위한 수업을 열었다.

수업마다 노트를 미리 써서 나누었고, 그 노트를 띄워 놓고 말로 풀었다. 개발자, 데이터 사이언티스트, 금융인, 언어에 강했던 사람, 그리고 평생 수학을 원수로 여겼던 자신의 어머니까지 같은 교실에 앉았다. 이 책은 그 수업의 노트와 목소리를 그대로 옮긴 것이다.

저자의 말

설계를 기계가 하는 시대에도, 결정은 사람이 합니다

질문

계산과 코드는 물론 설계까지 인공지능이 해 주는 시대가 온다면, 사람에게 수학이 아직 필요할까?

답

필요합니다. 설계는 기계가 해도 그 설계에 서명하는 것은 사람입니다. 결과물을 **감수하고 검토하는 일**, **왜 되는지와 언제 안 되는지 설명하는 일**, 틀렸을 때 **책임져야 하는 결정**은 기계에게 넘길 수 없습니다. 그 결정을 떠받치는 사고의 힘은 공식 몇 개가 아니라 **현대 수학의 방식**, 곧 정의하고 전제를 밝히고 **구조를 보는 사고**에서 나옵니다. 그리고 오늘의 인공지능과 데이터가 쓰는 언어는 대부분 **미적분학과 선형대수학**입니다. 이 책은 그 셋을 하나의 길로 잇습니다.

이 책이 하는 일

1 현대 수학의 방식 — 정의와 전제에서 출발합니다 (1–3강)

3강에서 말했듯 이 수업은 현대 수학을 소개하려는 수업입니다. 1강은 집합과 공리, 곧 '무엇을 받아들이고 시작하는가'를 묻고, 3강은 익숙한 함수를 자기 말로 다시 정의하게 합니다. 무엇을 전제했는지 밝힐 수 있어야 검토가 시작됩니다.

2 구조로 생각합니다 — 겉모습이 달라도 같은 이유로 움직이는 것을 알아봅니다 (2–4·8·16강)

4강에서 한 수강생이 이렇게 정리했습니다. "연산한 다음 옮기는 것과, 먼저 옮긴 다음 계산하는 것의 결과가 같다." 지수함수가 덧셈의 구조를 곱셈의 구조로 옮긴다는 뜻이고, 이것이 구조를 보존하는 함수입니다. 구조를 알아보면 행렬의 곱이 함수의 합성임을(5강), 정규분포들의 모임이 휘어진 평면임을(16강) 보게 됩니다. 무엇이 보존되어야 하는지 아는 것이 무엇을 확인해야 하는지 아는 것입니다.

3 미적분학과 선형대수학 — 인공지능과 데이터의 두 언어 (5–13강)

선형대수학(5–8강)에서는 데이터를 행렬로, 행렬을 함수로 보고, 통계와 머신러닝으로 이어지는 무지개 정리에 이릅니다. 미적분학(9–13강)에서는 변화를 재고 가장 가파른 방향을 찾습니다. 경사하강법의 뿌리이고, 그 공식이 무엇을 전제하는지도 함께 봅니다(9강).

그 사고가 검토와 결정이 되는 순간 — 모두 이 책의 수업에서

1 쓸모 있다고 옳은 것은 아닙니다. "요긴하게 쓰인다는 이유만으로 그 정의가 맞는 것은 아닙니다."(2강) 잘 돌아가는 결과물도 옳은지는 따로 따져야 합니다.

2 '왜 되는가'를 끝까지 따지는 것이 증명입니다. 1강의 대각선 논법은 실수를 하나하나 확인하지 않고도, 어떤 목록에서도 빠지는 수가 반드시 있음을 보입니다. 몇 가지 예로 시험해 보는 것과 모든 경우에 성립하는 이유를 아는 것은 다릅니다.

3 결정에는 설명이, 방법에는 한계가 따릅니다. 방법을 바꾸어 쓰더라도 "어떤 정의와 조건을 바꾸었는지 설명해야" 합니다(9강). 16강의 공분산 공식은 큰 표본에서의 근사이지 모든 경우의 등식이 아닙니다. 어디까지 믿을 수 있는지 아는 사람만 결과에 책임을 질 수 있습니다.

4 수강생들이 직접 그 자리에 이르렀습니다. 논문을 이해하기 어렵다던 인공지능 엔지니어가 첫 수업에 있었고(1강), 딥러닝을 공부하던 한 분은 자신이 잘못된 가정을 쓰고 있는 것은 아닐까 묻기 시작했습니다(10강).

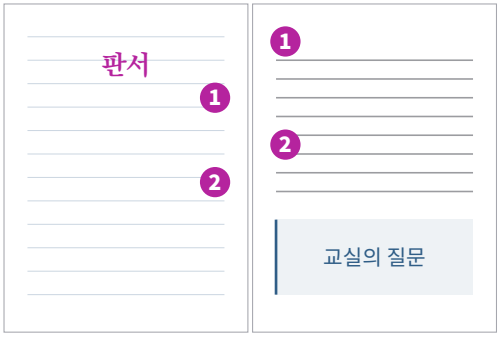
약속하지 않는 것

이 책은 일자리나 정답을 약속하지 않고, 전문가가 되는 대학원 공부를 대신하지도 않습니다. 1강을 마치며 말했듯 이 수업은 만병통치약이 아니고, 판단은 여러분의 몫입니다. 이 책은 그 판단에 쓸 언어, 곧 "그래서 이것은 무엇인가?", "왜 그런가?", "다른 전제라면 무엇이 달라지는가?"를 묻는 힘을 건넵니다.

2026년 가을 **조건희**

이 책을 읽는 법

한 번 펼치면 교실의 칠판과 목소리가 함께 보입니다



왼쪽: 수업에서 쓴 판서　오른쪽: 그 판서를 두고 한 말

1 왼쪽은 판서, 오른쪽은 말입니다. 왼쪽 쪽에는 수업 때 실제로 쓴 노트를, 쪽 구성과 그림과 색까지 원본 그대로 따라 조판해 실었습니다. 오른쪽 쪽에는 그 노트를 두고 강의자가 한 이야기를 읽기 좋게 다듬어 옮겼습니다.

2 번호가 둘을 잇습니다. 오른쪽 글의 1 2 3은 왼쪽 판서에서 같은 번호가 붙은 자리를 가리킵니다. 강의자가 "여기 보시면"이라고 말한 곳이 바로 그 자리입니다.

3 색에는 뜻이 있습니다. 판서와 해설 모두 같은 약속을 따릅니다. 검은 글씨는 본줄기, 분홍 글씨는 강조와 생각할 거리, 파란 글씨는 덧붙인 설명, 빨간 글씨는 주의할 점입니다. 그림과 식 속의 초록·보라·주황은 서로 다른 대상을 구별하는 색입니다. 파란 상자에는 그날 교실에서 나온 질문을 실었습니다.

4 판서의 실수는 바로잡았습니다. 원본 노트에서 잘못 쓴 곳은 대부분 판서에서 바로 고쳐 실었습니다. 상당수는 수업 중에 강의자나 수강생이 직접 짚어 고친 것입니다. 그림 속 표기처럼 고치면 원본과 달라지는 몇 곳은 그 줄 옆에 **바로잡음 1** 표시를 붙여 판서 아래에 바른 내용을 적었습니다.

5 원본 노트와 써 보기 칸. 강 사이의 빈 왼쪽 쪽에는 손으로 쓴 원본 노트 한 쪽을 실었습니다. 판서가 짧은 쪽 아래에는 핵심을 자기 말로 적어 보는 '써 보기' 칸이 있습니다.

이 교실의 사람들

첫 수업, 화면 너머로 마흔다섯 명이 모였습니다

나이는 20대 초반부터 60대 후반까지였습니다. 수업을 시작하기 전에 몇 분이 자기소개를 했습니다.

> • 회사에 다닙니다. 일에도 수학이 필요했지만, 어릴 때 수학을 재미있게 공부했어요. 나중에는 수학 콘텐츠도 만들어 보고 싶습니다.
> • 50대입니다. 통계 도구를 쓰는데 그 안의 알고리즘을 이해하지 못해 답답했어요.
> • 수학에는 전혀 흥미가 없었는데 프로그래밍에 빠졌고, 인공지능까지 오게 됐습니다. 기초가 많이 부족하다는 걸 압니다.
> • 인공지능 엔지니어입니다. 논문을 이해하기 어렵습니다. 수학이 평생 즐길 취미가 될 수도 있겠다는 생각도 들었어요.
> • 자산운용사에서 신사업을 맡고 있습니다. 데이터 사이언스를 원리도 모른 채 쓰고 있어요.
> • 수학은 못했고 언어는 잘했어요. 사람이 왜 사는지 고민하다가 이 자리에 왔습니다.

강의자 어떻게 수업을 해야 할까 고민하다가, 어릴 적 가족들이 TV 앞에 모이던 장면이 떠올랐어요. 할아버지와 할머니부터 손자까지 둘러앉아 드라마를 보며 이야기를 나누던 모습이요.

소개를 들어 보면 많은 분이 “내가 따라갈 수 있을지는 모르겠지만”이라는 말을 붙이십니다. 충분히 그럴 수 있어요. 나한테 당연한 것이 옆 사람에게는 전혀 당연하지 않습니다. 그래서 불편한 곳이 있으면 적극적으로 말씀해 주시면 좋겠어요. 그 불편함이 나만의 것이 아니라는 걸 확인하는 것도 이 교실의 몫입니다.

입시에서 공부한 수학과 지금 필요한 수학은 조금 다른 문제일 수 있습니다. 그때는 공식을 받아들이고, 문제에 적용해서, 점수를 얻는 게 중요했죠. “그래서 이게 무엇인가?”를 묻는 일은 뒤로 밀렸고요. 영어 시험 점수와 실제 영어 실력이 꼭 같지 않은 것처럼요.

첫 시간 이야기는 나폴레옹 시대로 거슬러 올라갑니다. 푸리에는 열이 퍼지는 현상을 방정식으로 쓰고, 그 해를 구하다가 함수를 무한히 더하는 표현을 만났습니다. 무한히 많은 항을 더한다는 건 정확히 무슨 뜻일까요? 이 질문은 결국 무한과 집합에 관한 질문이 되었고, 그 흐름 속에서 칸토어의 집합론이 나옵니다.

1강

집합과 명제, 공리

참과 거짓은 정말 분명할까요?

난이도 ●○○○○ 필요한 배경 중학교 수학이면 충분합니다

> 수학적인 주장은 언제나 참과 거짓만 취급한다. **(이게 정말일까요?)**

– 첫 수업 판서의 첫 줄

이 강에서 얻는 것

1. 집합을 '기준을 만족하는 것들의 모임'이라고만 하면 왜 곤란해지는지 (이발사의 역설)
2. 자연수·정수·유리수는 하나씩 짝지을 수 있는데, 실수는 왜 그럴 수 없는지 (칸토어의 대각선 논법)
3. 수학의 출발점이 '공리의 선택'이라는 말의 뜻 (연속체 가설, 평행선 공준)

이 강의 흐름

판서 1–3 집합이란 무엇인가·이발사의 역설·익숙한 그림
판서 4–6 무한을 하나씩 세기: 자연수, 정수, 유리수
판서 7–10 셀 수 없는 무한: 실수와 대각선·연속체 가설
판서 11–13 공리의 선택: 유클리드에서 비유클리드로

1강. 집합과 명제, 공리

수학적인 주장은 언제나 참과 거짓만 취급한다. **(이게 정말일까요?)** 1

Yes or No를 판단한다는 것; 특정 집합에 속하는지 여부로 판단하는 것과 같음.

예시) 강아지는 고양이가 아니다. 2

$\iff$ 강아지는 고양이의 모임에 속하지 않는다.

$\iff$ 강아지 $\notin$ {고양이1, 고양이2, 고양이3, ...}

속해있지 않다는 표현; $\in$의 부정

추상화 : 강아지 $\iff x$,

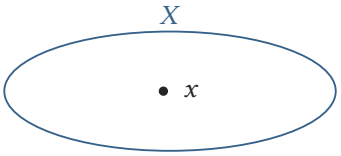
고양이의 모임 $\iff S$, 3

$\iff x \notin S$

x는 원소(element), S는 집합(Set)이라 부르고 싶다.

여기서 필요한 질문,

질문) 원소란 무엇인가? 어떤 집합에 속한 것. 4



예스 아니면 노, 정말 그럴까요?

현대 수학은 '옳고 그름만 다룬다'는 믿음을 의심하는 데서 시작합니다

1 제가 '현대' 수학이라는 말을 썼는데, 현대 수학과 그렇지 않은 수학의 차이가 바로 이 첫 주에 있습니다. 수학은 기본적으로 옳고 그름만 취급한다는 전제가 있죠. 예스와 노, 흑백논리요. 그게 정말 맞는지부터 묻는 겁니다.

학교에서는 집합 다음에 명제를 배웠어요. 벤 다이어그램도 그렸고요. 집합을 공부하다가 급속도로 수학에 흥미를 잃는 게 꽤 흔한 일 같습니다. 그때만 해도 어떤 원소가 집합에 속하는지 안 속하는지는 분명하다고 믿었어요. 그 믿음부터 질문하고 싶은 겁니다.

2 "강아지는 고양이가 아니다"라는 문장이 있다고 해 보죠. 고양이들의 모임을 생각하고, 강아지는 거기 들어가지 않는다고 기호로 적습니다.

3 수학은 여기서 추상화를 합니다. 강아지라는 구체적인 것 대신 문자 x를 쓰고요. 고양이의 모임, 즉 집합(set)은 첫 글자를 따서 대문자 S로 씁니다. 그러면 $x \notin S$, "x는 S에 들어가지 않는다." x를 원소, S를 집합이라고 부르고 싶어요. 다 아는 뻔한 이야기처럼 느껴지죠.

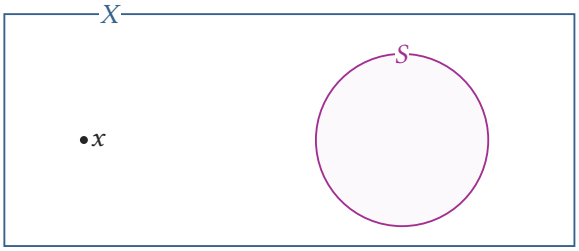
4 그런데 수학이라면 모든 게 명확하게 규정되어야 하잖아요. 그래서 계속 묻습니다. 원소란 무엇이냐? 어떤 집합에 속한 것을 말합니다. 대문자 X 안에 점 하나를 찍어 두면 되겠죠. 그러면 집합은 또 무엇이냐? 이 질문이 다음 쪽으로 이어집니다.

> 교실의 질문
>
> **수강생** 현대 수학에서 '현대'는 무슨 뜻인가요? 예전에는 이론 중심이었고, 현대에는 문제 해결이나 실용이 강조된다고 이해했는데요.
>
> **강의자** 너무 좋은 질문입니다. 오늘 수업이 바로 그 출발점이에요. 오늘 이야기를 끝까지 들으신 다음에 같은 질문을 다시 해 보시면 좋겠습니다.

판서 2

원본 노트 2쪽

그러면 집합 S란 무엇인가? 어떤 기준을 만족시키는 원소들을 모은 것, 이라고 우리는 수학의 정석에서 배웠습니다. 1
마치,



라고 하면 다 아는 것처럼. **정말 그러할까요?**
가령,
이발사 왈 "자신의 수염을 스스로 자르지 않는 사람들에게만 수염을 잘라주겠다".

⟶ 기준 정립.

⟶ 집합 S (이발사가 수염을 깎아주는 이들의 모임) 2

그러면, 이발사 x는 S의 원소이면서 동시에 S의 원소이면 안 된다. **모순!**
(이를 '이발사의 역설'이라 부릅니다.) 3

문제점) 집합을 단순히 원소를 모은 것으로 여겼으므로.
⟹ 집합을 규정하는 과정에서 뭔가가 더 필요하다. 4
여기서 '뭔가'를 우리는 공리(axiom)라 부를 것입니다.
공리를 도입하기에 앞서,

써 보기 판서를 가리고, 이 쪽의 핵심을 자기 말로 적어 보세요.

이발사는 자기 수염을 깎을까요?

기준을 선언한다고 해서 언제나 집합이 생기는 것은 아닙니다

1 집합은 어떤 기준을 만족하는 원소들을 모은 것. 우리는 그렇게 배웠습니다. 전체 모임 X를 정해 두고, 기준에 따라 그 안에 S를 그린 다음, x가 그 안에 있는지만 판별하면 다 끝난 것처럼 느껴집니다. 그런데 기준을 말로 정하기만 하면 정말 괜찮을까요?

2 이런 이발사를 생각해 보죠. "스스로 수염을 깎지 않는 사람의 수염은 모두 깎아 주고, 스스로 깎는 사람의 수염은 깎아 주지 않겠다." 기준이 생겼습니다. 이발사가 수염을 깎아 주는 사람들의 모임 S가 생긴 거예요. 그러면 이발사도 사람이니, 이 기준을 자기 자신에게도 적용해 보겠습니다.

3 자기 수염을 깎으면 '스스로 깎는 사람'이 됩니다. 그런데 그런 사람의 수염은 깎지 않겠다고 했죠. 말이 안 됩니다. 반대로 깎지 않으면 '스스로 깎지 않는 사람'이 되는데, 그런 사람의 수염은 이발사가 깎아 주겠다고 했어요. 결국 자기 수염을 깎아야 합니다. 이쪽도 말이 안 되죠. 이것을 이발사의 역설이라고 부릅니다.

4 어떤 원소가 그림 안에 들어가는지 판단하면 된다고 믿었는데, 기준을 선언했다고 해서 언제나 그런 모임이 문제없이 만들어지는 건 아니었던 겁니다. 집합을 규정하는 과정에 무언가가 더 필요합니다. 그 '무언가'를 우리는 공리(axiom)라고 부를 겁니다.

교실의 질문

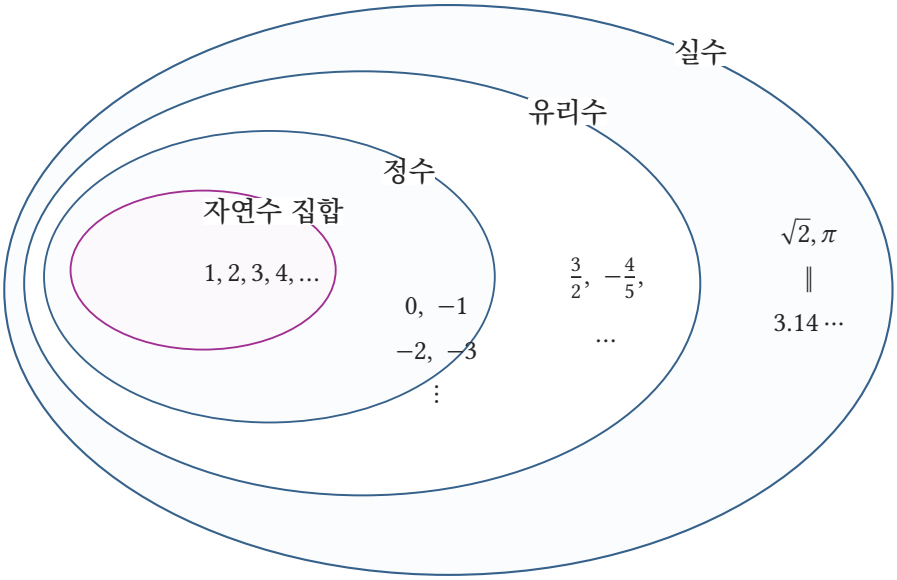
수강생 수학에서 역설은 정확하게 어떻게 정의되나요? 찾아보니 참이라고 가정하면 거짓이 되고, 거짓이라고 가정하면 참이 되는 것이라던데요.

강의자 여기서는 선언한 조건을 자기 자신에게 적용하자 논리가 맞지 않는 상황이 생겼다, 그 정도로 이해하시면 좋겠어요. 철학적인 의미까지 들어가면 이야기가 길어집니다. 지금은 어느 쪽으로 적용해도 모순이 생긴다는 점에 집중해 주세요.

수강생 그러면 집합을 만드는 기준을 어떻게 정할지도 논의해야 하지 않나요?

강의자 그게 오늘 이야기의 핵심입니다. 기준을 아무렇게나 세우면 안 되는구나. 그러면 어떻게 세워야 타당할까. 그 질문을 함께 해 보고 싶어요.

본 적 있는 그림



1

질문들

1) 정수의 집합은 자연수 집합보다 크다?

2) 유리수의 집합은 정수의 집합보다 크다?

2

이 모든 질문의 답은 전부 **거짓**입니다.

3

1) 자연수의 집합. $\xleftrightarrow{\text{일대일 대응}}$ 정수의 집합

4

자연수의 집합을 짝수의 모임과 홀수의 모임으로 나누자.

써 보기 판서를 가리고, 이 쪽의 핵심을 자기 말로 적어 보세요.

익숙한 그림이 꼭 편안한 그림은 아닙니다

10년 넘게 본 그림 위에, 뻔해 보이지만 뻔하지 않은 질문 두 개

1 이 그림은 아마 초등학교 때부터 보셨을 거예요. 자연수 $1, 2, 3, 4, \dots$ 가 있고요. 정수에는 여기에 $0, -1, -2, -3, \dots$ 이 더 있다고 우리는 '믿습니다'. '믿는다'는 표현은 의심해 보시라고 일부러 넣었습니다. 정수까지 포함하는 유리수가 있고, 비율로 나타내는 $\frac{3}{2}$, $-\frac{4}{5}$ 같은 수들이 여기 들어가요.

유리수는 영어로 rational number입니다. 고등학교 때 왜 '합리적인' 수일까 싶었는데, 그냥 ratio(비율)의 형용사예요. 그리고 실수가 있습니다. 분수로 나타낼 수 없는 $\sqrt{2}$나 π 같은 수도 있다고 믿었죠.

이 그림이 편안하신가요? 이 그림이 얼마나 타당한지 생각해 보신 적이 있으세요?

2 이 그림을 두고 뻔해 보이지만 뻔하지 않은 문장 두 개를 던지겠습니다. "정수의 집합은 자연수의 집합보다 크다." 그럴듯하죠. 그림이 그렇게 생겼으니까요. "유리수의 집합은 정수의 집합보다 크다." 이것도 그럴듯합니다. '크다'를 엄밀하게 정하지는 않겠습니다. 각자 직관적으로 받아들이시면 돼요.

3 그런데 둘 다 아니라는 거예요. 앞에서 본 것과 이어서 생각해 보세요. 기준을 이상하게 주면 집합이 명확하게 정해지지 않을 수 있다는 가능성을 우리는 이미 한 번 보았습니다.

4 직관에 어긋나는 상황이 실제로 어떤지 보려고, 먼저 자연수 집합과 정수 집합이 하나씩 짝지어진다는 것, 일대일로 대응한다는 것을 확인하겠습니다. 왜 이런 말도 안 되는 일이 가능한지가 질문의 포인트입니다. 자연수를 짝수와 홀수로 나누는 데서 시작해 보죠.

판서 4

짝수의 경우, 1

$0\ (=2\times 0)$은 0으로,

$2\ (=2\times 1)$는 1로,

$4\ (=2\times 2)$는 2로,

일반적으로,

$2n\ (=2\times n)$은 n으로 대응. 2

홀수의 경우,

$1\ (=2\times 0+1)$은 -1로,

$3\ (=2\times 1+1)$은 -2로,

$5\ (=2\times 2+1)$는 -3으로,

일반적으로,

$2n+1\ (=2\times n+1)$은 $-(n+1)$로. 3

즉, 자연수와 정수는 각각 하나씩, 전부 대응된다.

그러므로 정수의 모임의 개수와 자연수의 모임의 개수는 일치한다.

(특히, 짝수의 모임, 홀수의 모임, 자연수의 모임이 모두 일대일

자연수와 정수를 하나씩 짝지어 봅시다

짝수는 0과 양의 정수로, 홀수는 음의 정수로

1 짝수는 2 곱하기 어떤 수의 꼴입니다. 여기서는 0도 자연수에 넣겠습니다. $0 = 2 \times 0$이니까 분홍색 0으로 보냅니다. $2 = 2 \times 1$은 1로, $4 = 2 \times 2$는 2로. 일반적으로 짝수 $2n$은 n으로 보내면 됩니다.

2 홀수는 2 곱하기 어떤 수에 1을 더한 꼴이에요. $1 = 2 \times 0 + 1$이면 분홍색 0에 1을 더하고 음수 부호를 붙여 -1로 보냅니다. $3 = 2 \times 1 + 1$은 -2로, $5 = 2 \times 2 + 1$은 -3으로. 일반적으로 $2n + 1$은 $-(n + 1)$로 보냅니다.

3 같은 곳으로 가는 수가 하나도 없죠. 그리고 정수를 아무거나 하나 골라도, 그 정수로 오는 자연수를 찾을 수 있습니다. 자연수와 정수가 놀랍게도 하나씩 빠짐없이 짝지어진 거예요. 처음 그림과 비교해 보세요. 자연수는 분명히 정수 안에 들어가 있는데요.

교실의 질문

수강생 홀수 $2n + 1$을 왜 $-(n + 1)$로 보내는지 잘 모르겠습니다. 이렇게 값을 바꿔서 대응시켜도 되나요?

강의자 우리가 만들려는 건 자연수와 정수 사이의 짝짓기예요. 짝수로 0과 양의 정수의 짝을 다 만들었으니, 아직 쓰지 않은 홀수로 음의 정수의 짝을 만드는 거죠. 홀수 $1, 3, 5, \ldots$가 $-1, -2, -3, \ldots$에 하나씩 대응합니다.

수강생 처음에 무엇을 만들려는지 놓치고 대응만 봐서 헷갈렸던 것 같아요.

수강생 자연수와 정수가 이렇게 짝지어진다면, 자연수가 정수의 부분집합이라는 말은 어떻게 되나요?

강의자 어느 자연수를 골라도 정수이니, 자연수 집합은 정수 집합의 부분집합이 맞습니다. 짝을 지을 수 있느냐와는 별개의 이야기예요. 바로 답을 듣기보다, 그 불편함을 가지고 다음 이야기를 들어 보시면 좋겠습니다.

대응이 됨 또한 알 수 있다 - 연습문제)

2) 정수의 집합 역시 유리수의 집합과 일대일 대응이 됨을 보이고자 한다.
정수는 양의 정수, 0, 음의 정수로 구성되어 있고, 유리수 역시 양의 유리수, 0, 음의 유리수로 이루어져 있으므로 각각의 0은 서로 대응시키면 되고, 양의 정수 (즉 자연수)와 양의 유리수의 일대일 대응 관계를 찾아내면 음의 경우는 부호만 바꾸어주면 될 것이다. 1

(이하 논증에는 한 가지 논리적 허점이 있습니다, 결과적으로 논증 자체는 참이지만 이를 정확히 메꾸는 과정은 상당한 수고를 요구합니다. 우리는 이 방향으로 가지는 않을 것입니다. 그럼에도 이 허점을 찾아보세요) 2

모든 양의 유리수는 분수꼴 $\frac{m}{n}$로 나타낼 수 있으므로
분모가 같은 수들을 다음과 같이 배치하자. 3

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{5}{1} \quad \frac{6}{1} \quad \frac{7}{1} \quad \frac{8}{1}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{6}{2} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{8}{2}$$

써 보기 판서를 가리고, 이 쪽의 핵심을 자기 말로 적어 보세요.

유리수도 하나씩 세어 갈 수 있을까요?

자연수와 양의 유리수의 짝만 찾으면 됩니다

1 이제 정수와 유리수도 하나씩 짝지어진다는 걸 보이고 싶어요. 정수는 양의 정수, 0, 음의 정수로 나뉘고, 유리수도 양의 유리수, 0, 음의 유리수로 나뉩니다. 0은 0으로 보내면 되고요. 양의 정수는 곧 자연수죠. 그러니 자연수와 양의 유리수를 짝지어 주기만 하면, 음수 쪽은 부호만 바꾸면 됩니다. 여기까지는 수학적으로 허점이 없습니다.

2 그런데 제가 아래 적어 둔 방식에는 허점이 하나 있어요. 그걸 정확하게 메우려면 너무 많은 이야기를 해야 해서 자세히 설명하지는 않겠습니다. 다만 그 허점을 찾아보려고 애쓰는 건 분명 도움이 될 거예요. 이렇게 폭넓은 분들과 이야기할 때는 모든 걸 정확하게 말하기보다 필요한 비약도 있어야 한다고 생각합니다.

3 양의 유리수는 모두 양의 정수 m, n으로 $\frac{m}{n}$처럼 쓸 수 있습니다. 분모가 같은 수끼리 한 줄에 놓아 보죠. 첫째 줄은 분모가 1, 둘째 줄은 분모가 2, 셋째 줄은 분모가 3입니다. 각 줄의 분자에는 $1, 2, 3, \ldots$을 차례로 적고요.

이 분수들을 어떤 순서로 하나씩 읽어 나갈 수 있다면, 첫 번째, 두 번째, 세 번째 하고 번호를 붙일 수 있습니다. 그렇게 센다는 것 자체가 자연수와 짝을 짓는 일이에요. 여기가 좀 어렵습니다.

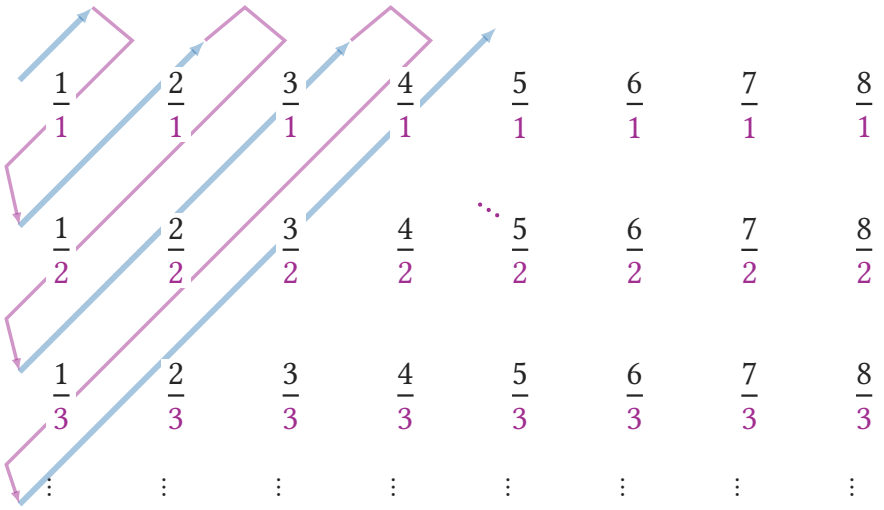
> 교실의 질문
>
> **수강생** 짝을 못 찾고 남는 정수가 있으니, 정수 집합이 더 크다고 생각할 수는 없을까요?
>
> **강의자** 앞에서 만든 대응에서는 모든 정수에 짝이 있어요. 자연수 하나에 정수 하나가 대응하고, 어느 정수를 골라도 그 정수로 오는 자연수가 있습니다. 먼저 이 사실을 확인하고, 왜 그게 직관과 다르게 느껴지는지 생각해 보시면 좋겠어요.

판서 6

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{6}{3} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{8}{3}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

양의 정수(자연수)와 일대일 대응시키는 방법을 찾는 것은 양의 유리수를 하나씩 순차적으로 세는 방법을 찾는 것과 같다. 한 가지 괜찮은 방법으로, 위의 나열된 양의 유리수들을 대각선 방향으로 세면 된다. 1



2

(고등학교 수열 단원에서 이 세는 방법을 군수열이라 부릅니다) 양의 유리수를 순차적으로 셀 수 있으므로 양의 정수와 일대일 3

써 보기 판서를 가리고, 이 쪽의 핵심을 자기 말로 적어 보세요.

대각선으로 세면 됩니다

분자와 분모의 합이 같은 수끼리 한 묶음

1 한 가지 괜찮은 방법은 늘어놓은 양의 유리수를 대각선 방향으로 세는 겁니다.

2 왜 대각선이냐면, 첫 번째 대각선의 $\frac{1}{1}$은 분자와 분모를 더하면 2예요. 두 번째 대각선은 더하면 3, 세 번째는 4, 네 번째는 5입니다. 보이시죠? 그리고 대각선마다 들어 있는 수의 개수가 1개, 2개, 3개, 4개, …, n번째 대각선에는 n개입니다. 그러니 어느 분수든 몇 번째 대각선의 몇 번째에 있는지 알 수 있고, 처음부터 몇 번째인지 셀 수 있습니다.

3 고등학교 수열 단원에서 배운 군수열이 바로 이렇게 세는 방법이에요. "몇 번째 항인지 구하시오" 같은 문제, 기억나실 겁니다. 몰라도 괜찮습니다. 이렇게 양의 유리수를 셀 수 있으니, 양의 정수와 짝지을 수 있습니다.

교실의 질문

수강생 같은 수를 나타내는 분수가 여러 번 나오면 일대일 대응이 아닌 것 아닌가요?

강의자 맞습니다. 그림에 $\frac{1}{3}$도 있지만 $\frac{2}{6}$도 있잖아요. 같은 수죠. 그게 앞에서 말한 허점이에요. 대각선으로 세는 논리 자체는 맞고, 일대일 대응을 제대로 맞출 수도 있습니다. 다만 정확히 맞추는 건 직관을 전하는 데서 벗어나 배보다 배꼽이 커지는 일이라 노트에는 적지 않았어요. 궁금하신 분은 공부해서 발표해 주셔도 좋습니다.

쉬는 시간에

"재미있어요. 평소에는 이렇게 생각해 볼 일이 없잖아요. 논리를 따라가는 데만 집중하게 되니까요." — 한 수강생

대응이 성립한다. 그러므로 위의 논의에 의해 정수와 유리수 간의 일대일 대응이 성립한다.

이 시점에서 다시 질문,

3) 유리수와 실수 간에도 일대일 대응이 성립한다?

1

이 또한 대답은 거짓입니다.

우리는 결론을 부정하여 모순을 이끌어냄으로써 결론이 참임을 보이고자 한다. (이러한 논증을 '귀류법'이라 부릅니다)

2

만약에 유리수와 실수 간에 일대일 대응이 성립한다고 가정하자. 그런데 우리는 이미 확인한 1), 2)로부터 자연수와 유리수 사이에 일대일 대응이 성립함을 알고 있다. 그러므로 유리수와 실수의 일대일 대응이 성립하면 자연수와 실수 사이에 일대일 대응이 성립해야 한다. 이는 실수 전체의 모임을 자연수들과 대응하여 하나하나 순차적으로 세어 나갈 수 있다는 뜻이다. 그렇다면 임의의 실수의 부분집합을 선택해도 순차적으로 세어 나갈 수 있어야 한다. 우리는 실수의 특정 부분집합을 골라서 이럴 수 없음을 확인하고자 한다.

0과 1 사이에 있는 모든 실수의 모임을 생각하자.

0과 1 사이의 실수는 언제나 다음의 형식으로 기술된다:

3

$$0.a_1a_2a_3a_4\ldots$$

ex) 0.1
0.22
0.12345678901

유리수 다음은 실수일까요?

이쯤 되면 실수도 짝지어질 것 같지만, 그렇지 않습니다

정리해 보죠. 자연수와 정수가 짝지어지고, 놀랍게도 정수와 유리수도 짝지어졌습니다. 이걸 듣고 바로 '아, 그렇구나' 하고 이해되는 건 불가능하다고 생각해요. 수학은 그렇게 만만하지 않으니까요. "부분집합인데 어떻게 전체와 하나씩 짝지어지지?" 하는 의문이 드는 게 당연합니다.

1 그러면 유리수와 실수도 짝지어질 것 같죠. 그런데 아니라는 겁니다. 이번에도 대답은 거짓이에요.

2 이번에는 귀류법을 쓰겠습니다. 보이고 싶은 것을 일부러 부정해 놓고, 거기서 모순을 끌어내는 방법이에요. 유리수는 이미 자연수와 짝지어진다는 걸 알고 있으니, 실수를 셀 수 없다는 것만 보이면 됩니다. 실수 전체를 셀 수 있다면 그 일부도 셀 수 있겠죠. 그래서 실수의 일부를 골라, 그것부터 셀 수 없다는 걸 보이려고 합니다.

3 고를 것은 0과 1 사이에 있는 실수들입니다. 실수는 일단 직관적으로 생각하는 것으로 하겠습니다. 0과 1 사이의 수는 소수 $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$로 쓸 수 있죠. 소수점 아래 첫째 자리가 a_1, 둘째 자리가 a_2이고, 십진법이니까 각 자리는 0부터 9까지 열 가지 숫자 중 하나입니다. 0.1처럼 끝나기도 하고, 소수점 아래가 끝나지 않기도 합니다.

교실의 질문

수강생 직관주의처럼 귀류법을 받아들이지 않는 입장에서는 이 논증을 어떻게 보나요?

강의자 수학의 논리적 출발점을 다르게 보는 입장도 있습니다. 오늘은 그 차이까지 자세히 다루지는 않을게요. 보통의 수학에서는 귀류법을 많이 씁니다. 어떤 논증 방식을 받아들일지는 수학의 기초에 관한 질문과 이어져 있어요.

그리고 소수점 아래 i번째 자리의 숫자 a_i는 0부터 9 사이의 어떤 숫자이다.
0과 1 사이의 실수들을 순차적으로 세어 나갈 수 있어야 하므로 순서를 매겨서 다음과 같이 적자: $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$
이를 다시 적으면 1

$$
\begin{array}{lccccccc}
x_1 = 0. & \boxed{a_1^1} & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & \ldots \\
x_2 = 0. & a_1^2 & \boxed{a_2^2} & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 & \ldots \\
x_3 = 0. & a_1^3 & a_2^3 & \boxed{a_3^3} & a_4^3 & a_5^3 & \ldots \\
x_4 = 0. & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & \boxed{a_4^4} & a_5^4 & \ldots \\
x_5 = 0. & a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & \boxed{a_5^5} & \ldots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & a_i^i
\end{array}
$$

2

여기서 0과 1 사이의 모든 실수는 순차적으로 셀 수 있으므로

$$x_i = 0.a_1^i a_2^i a_3^i a_4^i a_5^i \ldots$$

꼴로 표현되어야 한다.
이 시점에서 다음과 같은 수를 생각해보자. 3

$$x = 0.b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$$

여기서 각 i마다 a_i^i가 만약에 3이라면 b_i는 4로, a_i^i가 3이 아니라면 $b_i = 3$으로 준다. 4

써 보기 판서를 가리고, 이 쪽의 핵심을 자기 말로 적어 보세요.

대각선의 숫자를 하나씩 바꾸겠습니다

어떤 목록에도 없는 수를 직접 만들어 냅니다

1 0과 1 사이의 실수를 전부 셀 수 있다고 가정합시다. 그러면 순서를 매겨 $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$로 늘어놓을 수 있겠죠. 각 수를 소수로 한 줄씩 적습니다. 숫자 옆의 작은 위 번호는 몇 번째 수인지, 아래 번호는 소수점 아래 몇째 자리인지를 뜻해요.

2 이제 대각선을 봅니다. 분홍색 동그라미, 즉 첫째 수의 첫째 자리, 둘째 수의 둘째 자리, 셋째 수의 셋째 자리…. 행과 열의 번호가 같은 자리의 숫자들입니다.

3 0과 1 사이의 수를 새로 하나 만들겠습니다. $x = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots$. 목표는 이 목록 어디에도 없는 수를 만드는 거예요. 목적은 이해되시나요?

4 각 자리를 이렇게 채웁니다. i번째 대각선 숫자가 3이면 b_i는 4로, 3이 아니면 b_i는 3으로. 예를 들어 첫째 수의 첫째 자리가 3이면 b_1은 4입니다. 둘째 수의 둘째 자리가 5나 6이면 b_2는 3이고요. 이렇게 하면 b_i는 적어도 i번째 수의 i번째 자리와는 반드시 다릅니다.

교실의 질문

수강생 조금 천천히 설명해 주시면 좋겠습니다.

강의자 알겠습니다. 이렇게 말씀해 주시는 게 좋아요. 다시 해 볼게요. 셀 수 있다고 가정했으니, 0과 1 사이의 수는 전부 이 목록 어딘가에 적혀 있어야 합니다. 그런데 우리는 그렇게 적히지 않는 수를 만들려는 거예요. 그 수의 첫째 자리는 첫째 수와 다르게, 둘째 자리는 둘째 수와 다르게, 계속 그렇게 채우는 겁니다.

판서 9

그러면 x의 각 자릿수 b_i는 a_i^i와 다르므로 x는 그 어떤 x_i와도 달라야 한다. 이는 0과 1 사이의 모든 실수는 x_i 꼴이라고 한 것에 위배되어 모순이 발생한다.

1

이 모순은 자연수와 실수의 일대일 대응이 성립한다는 가정에서 비롯된 것이므로 원하는 결론이 도출된다.

참고 위의 논증을 칸토어 (Cantor, 1845-1918, 집합론 창시자)의 대각화 방법 (diagonal method)이라 부릅니다.

2

생각해볼 점

3

자연수 집합은 정수 집합에 포함된다. 자연수가 아닌 정수들이 존재한다.

정수 집합도 유리수 집합에 포함된다. 역시 정수가 아닌 유리수들이 있다.

그런데도, 세 집합 사이에는 일대일 대응이 가능하다.

어째서 (직관과 대치되는) 상황이 발생하는가? 이는 적어도 자연수 집합, 정수 집합, 유리수 집합이 전부 무한집합이기에 가능한 일이다.

그러나 모든 무한집합 간에 일대일 대응이 가능한 것이 아니다.

4

무한집합들 사이에도 (다소 놀랍게도) 엄연히 차이가 있다.

자연수 집합과 실수 집합의 경우처럼. 적어도 실수의 집합은

써 보기 판서를 가리고, 이 쪽의 핵심을 자기 말로 적어 보세요.

무한이면 다 같은 무한일까요?

셀 수 있는 무한과 셀 수 없는 무한

1 새로 만든 x가 목록의 어떤 x_i와 같을 수 있을까요? 같다면 소수점 아래 i번째 자리도 같아야 합니다. 그런데 바로 그 자리를 다르게 만들었죠. 그러니 x는 어떤 x_i와도 같을 수 없습니다. 0과 1 사이의 모든 수가 목록에 있다고 했는데, 목록에 없는 수가 나온 거예요. 셀 수 있다는 가정 자체가 틀린 겁니다.

2 이 방법을 칸토어의 대각화 방법(diagonal method)이라고 합니다. 귀류법을 쓰지 않고 보이는 방법도 있어요. 삼각함수를 배운 다음에 알려 드릴게요.

3 생각해 볼 점입니다. 자연수 집합은 정수 집합에 들어가고, 정수 집합은 유리수 집합에 들어갑니다. 그런데도 셋은 서로 하나씩 짝지어져요. 왜 이런 일이 가능할까요? 한 가지 설명은 셋 다 무한 집합이라는 겁니다. 유한 집합이라면 말이 안 되죠. 무한 집합은 세어 나가는 과정이 끝나지 않으니까요.

4 그렇다고 무한이면 다 짝지어진다는 뜻은 아닙니다. 유리수와 실수 사이에는 짝이 없어요. 둘 다 무한 집합이지만 같은 크기가 아닙니다. 칸토어 시대 사람들의 입장이 되어 보세요. 다 같은 무한 집합인데 뭔가 다르다. 지금은 '뭔가 있구나' 하는 정도의 느낌이면 충분합니다.

교실의 질문

수강생 '셀 수 있다'는 건 유한하다는 뜻 아닌가요? 자연수도 정수도 유리수도 무한 집합이라고 생각했는데요.

강의자 자연수와 짝지어진다는 건, 첫 번째, 두 번째, 세 번째 하고 번호를 빠짐없이 붙일 수 있다는 뜻이에요. 끝까지 다 세어서 끝낸다는 뜻이 아닙니다. 질문의 핵심은 결국 '셀 수 있다'는 말을 어떻게 받아들이느냐인 것 같아요.

판서 10

원본 노트 10쪽

일일이 셀 수 없을 만큼 자연수의 집합보다는 '크다'.

(집합론에서는 무한집합들을 포함하여 집합의 크기를 기수, Cardinal Number, 라 부릅니다) 1

그렇다면 다음의 질문을 생각해볼 수 있을 것이다.

질문 자연수의 집합보다는 '크고' 실수의 집합보다는 '작은' 무한집합이 존재하지 않는가? 2

이 질문은 칸토어에 의해 처음 제기되었고, 다비트 힐베르트에 의해 1900년 세계 수학자 대회에서 제기된 23가지 중요한 문제들 중에서 1번 문제에 해당한다. 이를 연속체 가설이라 부른다.

이 문제는 '반증 불가능'이 1940년 쿠르트 괴델에 의해 증명되었고, 1963년 폴 코헨에 의해 '증명 불가능'이 증명되었다.

(이에 대한 자세한 논의는 집합론의 ZFC 공리계에 대한 이해를 필요로 합니다.)

결론적으로 답이 없다는 것이다. 참이라고 해도 상관없고, 거짓이라고 해도 무관하다. 3

결국 무엇을 참으로 받아들일지는 각자의 '선택'의 영역에 해당하며, 내 선택과 타인의 선택이 일치할 필요가 없다. 그것도 심지어 수학의 법칙 하에서조차. 4

그렇다면, 다음의 질문도 생각해볼 수 있다.

써 보기 판서를 가리고, 이 쪽의 핵심을 자기 말로 적어 보세요.

무엇을 전제로 답을 구하고 있나요?

증명도 반증도 할 수 없는 질문을 만나다

1 집합론에서는 무한 집합까지 포함해 집합의 크기를 '기수', cardinal number라고 부릅니다. 들어 본 정도면 충분해요. 크기를 정확하게 말하려면 함수라는 개념이 필요한데, 함수는 3강에서 다룹니다.

2 그러면 이런 질문을 할 수 있겠죠. 자연수 집합보다는 크고 실수 집합보다는 작은 무한 집합이 있을까? 칸토어가 처음 던진 질문이고, 다비트 힐베르트가 1900년에 제시한 23개의 문제 중 첫 번째입니다. 이것을 연속체 가설이라고 해요.

3 1940년 쿠르트 괴델은 이 가설을 반증할 수 없음을, 1963년 폴 코헨은 증명할 수 없음을 보였습니다. 우리가 보통 쓰는 집합론의 공리만으로는 결정되지 않는다는 거예요. 이발사의 역설과는 구별해야 합니다. 이발사의 경우에는 모순이 생겼어요. 여기서는 모순이 아니라, 고른 공리만으로는 답이 정해지지 않는 겁니다. 참이라고 해도 상관없고, 거짓이라고 해도 상관없어요.

4 결국 무엇을 참으로 받아들일지는 각자의 '선택'의 영역입니다. 내 선택과 다른 사람의 선택이 같을 필요도 없고요. 그것도 수학 안에서 그렇습니다.

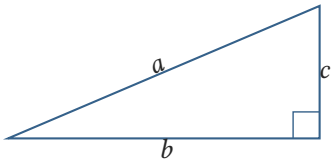
> 교실의 질문
>
> **수강생** 증명도 반증도 안 된다는 걸 보였으면, 수학자들은 거기서 끝내나요?
>
> **강의자** 집합론(set theory)은 끝난 학문이 아니에요. 지금도 연구하는 수학자들이 있습니다. 저는 기하학을 하는데, 집합 자체에 관심이 없는 사람들은 보통 널리 쓰는 공리를 받아들이고 연구합니다.
>
> **수강생** 공리가 틀렸다면 수학 전체가 틀릴 수도 있는 것 아닌가요?
>
> **강의자** 공리는 옳고 그름의 문제가 아니라, 받아들일지 말지의 문제입니다.

판서 11

원본 노트 11쪽

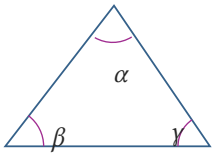
질문 우리가 중고등학교 시절에 숱하게 접해온 수학 안에서도 혹시 실상은 참도 거짓도 아닌데도 반드시 그러해야 하는 것처럼 받아들인 명제들이 있었을까요? 1

(피타고라스의 정리) 직각삼각형의 빗변의 길이의 제곱은 직각을 이루는 두 변의 길이의 제곱합과 같다. 2



$$b^2 + c^2 = a^2.$$

(삼각형 공준) 모든 삼각형의 내각합은 180°이다.
직사각형이 존재한다. 3



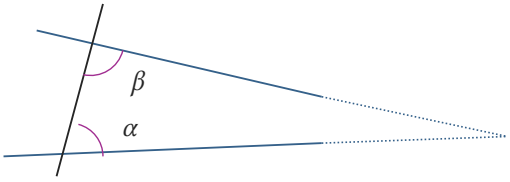
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

(등거리 공준) 평행한 두 직선의 거리는 어디에서나 일정하다.



(평행선 공준) 두 직선이 한 직선과 만나 이루는 두 동측내각의 합이 두 직각보다 작다면 이 두 직선을 무한히 연장할 때 그 두 동측내각과 같은 쪽에서 만난다. 4

$\alpha + \beta < 180^\circ$



중학교 기하학에도 전제가 있었습니다

우리가 참이라고 받아들였던 다섯 문장

1. 중고등학교 때 익숙하게 만난 수학에도, 사실은 참도 거짓도 아닌데 반드시 그렇다고 받아들인 명제가 있지 않았을까요? 삼각형의 합동, 기억나세요? 그걸 좋아한다는 사람은 살면서 딱 한 번 봤습니다. 보통은 너무 싫어하더라고요.

2. 피타고라스의 정리. 직각삼각형에서 빗변 길이의 제곱은 나머지 두 변 길이의 제곱의 합과 같다. 중학교 때 증명을 서너 가지 배웁니다. 다 잊어버리셨더라도 그렇다고 치고요.

3. 삼각형 세 내각의 합은 180°다. 이것도 받아들였죠. 그리고 직사각형이 존재한다.

4. 평행한 두 직선 사이의 거리는 어디서나 같다. 평행하지 않은 두 직선은 어딘가에서 만난다. 동위각, 동측내각 같은 말을 기억하는 분도 있을 거예요.

여기서 '왜?'라고 묻고 싶은 겁니다. 자연수와 정수가 짝지어진다는 말에 '왜?'라고 물었던 것처럼요.

기차역에서 선로를 내려다본다고 생각해 보세요. 두 선로는 평행하죠. 그런데 멀리 보면 만나는 것처럼 보일 때가 있잖아요. 우리가 평행선은 만나지 않는다고 확신하는 건, 그 선들을 완전히 평평한 평면 위에 놓고 생각하기 때문입니다. 거기에 이미 전제가 있는 거예요.

판서 12

사실은, 위의 다섯 가지 문장은 수학적으로 전부 동치이다. 1

기원전 3세기에 쓰인 유클리드 기하학 (우리가 중학교 시절에 배웠던) 원론은 다섯 가지 약속(공리)을 토대로 만들어졌고 그중에서 다섯 번째 공리가 평행선 공준에 해당한다.

그리고 19세기에 와서 제5공리를 부정해도 다른 공리와는 아무런 모순이 없음이 밝혀졌다. 마치 연속체 가설처럼. 2

(제5공리를 부정하는 기하학을 비유클리드 기하학 Non-Euclidean geometry, 현대 수학에서는 대개 리만기하학 Riemannian geometry라 부른다. 이름에 해당하는 베른하르트 리만은 가우스의 제자이다.) 3

(비유클리드 기하학은 순수수학적으로만 주류에 해당하는 수학이 아니며, 현대 통계학의 주류를 이루고 있는 베이지안 통계학, 코딩과 정보이론, 우리가 살아가는 물리적 시공간 등등에서 수학적 모델로서 자연스럽게 등장한다).

(한편으로, 기원전 3세기에 형성된 '선입견'이 19세기에 이르러서 비로소 깨지기 시작했음을 생각해보면 현재 이 순간에도 불필요한 선입견을 정답으로서 생각하고 있진 않을지 돌아보게 되는 것 같습니다)

오늘 수학교실의 결론 4

수학적 참과 거짓을 논하려면 공리의 선택을 필요로 한다.

특히나 무한집합들처럼 직관과 실제가 대치될 수 있는 수학적 대상을 다루기 위해서는 적절한 공리의 선택은 필수불가결하다.

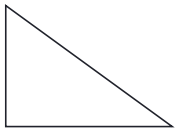
써 보기 판서를 가리고, 이 쪽의 핵심을 자기 말로 적어 보세요.

평면이라는 전제를 깨 버리면

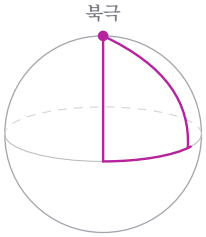
제5공리를 부정해도 기하학은 무너지지 않았습니다

1 사실 앞의 다섯 문장은 모두 동치입니다. 하나를 가정하면 나머지가 다 나와요. 중학교 수학으로 할 수 있습니다. 기원전 3세기, 지금부터 약 2300년 전의 유클리드『원론』은 다섯 가지 약속, 곧 공리 위에 세워졌고, 그 다섯 번째가 평행선 공준입니다.

2 그리고 19세기에 이 다섯 번째 공리를 부정해도 다른 공리들과 모순이 생기지 않는다는 게 밝혀졌습니다. 연속체 가설처럼요. 지구는 평평하지 않죠. 비행기는 지도 위의 직선이 아니라 지구 위의 최단 경로를 따라갑니다. 그렇게 보면 평행하게 그은 두 선의 거리도 일정하지 않아요.



평면: 내각의 합 180°



구면: 세 각이 모두 90°, 합 270°

3 제5공리를 부정하는 기하학을 비유클리드 기하학이라고 하고, 현대 수학에서는 대개 리만 기하학이라고 부릅니다. 리만은 가우스의 제자예요. 이건 순수수학만의 이야기가 아닙니다. 머신러닝과 통계에서는 확률분포의 모임을 하나의 휘어진 공간으로 보고, 아인슈타인의 상대성이론은 휘어진 시공간의 언어로 쓰였습니다. 아인슈타인은 그 언어를 수학자들에게 2년 정도 배웠다고 해요.

4 오늘 수학교실의 결론입니다. 수학의 명제는 기본적으로 'P이면 Q'예요. 가정이 깨지면 결론도 달라질 수 있습니다. 수학적 참과 거짓을 말하려면 공리를 골라야 하고, 무한 집합처럼 직관과 실제가 어긋날 수 있는 대상을 다루려면 공리를 잘 고르는 일은 반드시 필요합니다.

그러나 적절한 공리의 채택은 각자 (그리고 인간의) 합리성에 의존하는 선택과 믿음의 영역이다. 나쁘게 표현하면 내가 주어진 대상을 어떻게 바라볼지 '색안경'을 정해야 그로부터 참과 거짓을 논할 수 있는 것이다. 1

다음 시간을 위한 질문들

2

자연수 집합의 수학적 정의가 뭔가요?

(혹자는 $1, 2, 3, \ldots$ 이라고 말씀하시겠지만, '...'이라고 말하면 안 되는 것 아닌가요?)

왜 $1 + 1 = 2$ 인가요?

(왜 당연한 걸 물어, 라고 불만을 제기하고자 하시려면 납득 가능하게 설명하실 수 있나요?)

왜 $(-1) \times (-1) = 1$ 인가요? 3

써 보기 판서를 가리고, 이 쪽의 핵심을 자기 말로 적어 보세요.

정의하지 않은 채 안다고 말한 것은 아닐까요?

다음 시간을 위한 질문들

1 적절한 공리를 고르는 일은 각자의, 그리고 인간의 합리성에 기대는 선택이고 믿음입니다. 조금 거칠게 말하면, 대상을 어떻게 바라볼지 '색안경'을 먼저 정해야 거기서부터 참과 거짓을 말할 수 있다는 거예요. 돌아보셔야 하는 건 내가 서 있는 논리의 바닥입니다.

2 자연수를 정의해 본 적이 있나요? $1, 2, 3, 4, \dots$, 이게 정의인가요? 아니죠. '…'은 정의가 아닙니다. 정수도, 유리수도 정의한 적이 없어요. 정확히 무엇인지 모르는 대상을 두고 안다고 말해 온 셈이죠. 모르고 떠드는 것과, 어떻게 볼지 정하고 이야기하는 것은 다릅니다.

3 $(-1) \times (-1) = 1$도 같은 방식으로 물을 수 있습니다. 중학교 때는 규칙으로 배웠지만, 왜 그런지 설명하려면 우리가 무엇을 받아들이고 있는지 살펴봐야 해요.

> 교실의 질문
>
> **수강생** 수학 전체에서 절대 부정하면 안 되는 공리가 있나요?
>
> **강의자** 공리는 고르는 것이라는 이야기를 계속 하고 있습니다. 다만 전제를 바꿀 때는 새로 받아들이는 조건들이 서로 모순되지 않는지 따져야 해요.
>
> **수강생** 다른 문명에서도 수학이 지금과 같은 모습으로 발전할까요?
>
> **강의자** 외계의 지적 생명체를 만나도 수학은 통할 거라고 생각하기 쉽죠. 그런데 공리가 선택의 문제라면 어떨까요? 생각해 보시고 나눠 주세요.

교실의 장면: 수학이 원수였던 사람

수업이 끝나 갈 무렵, 강의자가 한 수강생을 소개했습니다

강의자 이 자리에 제 어머니도 계십니다. 한 달 전에 이 노트를 쓰고 읽어 보시라고 했는데, 수학을 싫어하셨던 분이에요.

> 고등학교 때부터 수학을 싫어했어요. 고1 때 선생님이 칠판에 문제와 전혀 다른 답을 계속 베껴 적으셨는데, 웃으려고 옆을 보니 반 60명 중 59명이 자고 있더라고요. 그때부터 수학을 안 하기 시작했어요. 다른 과목은 잘했는데 수학이 늘 말썽이었고, 수학 때문에 눈물도 많이 흘렸습니다. 졸업하는 순간 '다시는 수학 안 해도 된다'는 생각에 행복했어요. 사회학과에서 통계를 해야 했을 때는 결국 공부를 그만뒀고요. '수학은 원수다'라고 생각하며 살았습니다.
>
> 아들이 노트를 줬을 때, 제목만 보고 "나 이거 못 해" 했어요. 그런데 읽기 시작하니 처음 읽는 데만 며칠이 걸리더라고요. 기호를 몰라서 동그란 기호를 0으로 읽기도 했어요. "이런 사람이 같이 공부해도 되겠냐"고 물었더니 아들이 "엄마가 이해할 수 있으면 다른 분들도 이해할 수 있을 거예요" 하더라고요. 엄마가 무엇을 묻고 어떤 기호를 모르는지가 도움이 된다고요.
>
> 4강까지 다 읽었어요. 알고 나니 뿌듯해서 사진을 찍어 식구들한테 보여 줬어요. 학교 다닐 때는 왜 이런 질문은 못 하고 계산만 하며 점수에 매달렸을까 싶어요. 요즘은 밥하면서 당근을 썰 때도 '이건 무슨 집합에 들어가나' 생각하는 게 신기해요. 따라갈 수 있다고 생각하지는 않지만, 읽고 또 읽으며 해 보려고요. 저를 생각하시고 용기를 잃지 않으셨으면 좋겠습니다.

강의자 그런 의미에서 함께 공부해도 괜찮다고 생각합니다. 다만 이 수업을 만병통치약처럼 생각하지는 않으셨으면 해요. 공리라는 것이 있고 이런 의미가 있다고 소개하는 겁니다. '그래서 어쩌라고' 하실 수도 있고, 관점으로 받아들이실 수도 있어요. 그 판단은 각자에게 남겨 두겠습니다.

이 강의 핵심

한 쪽으로 다시 보는 1강

- **집합에는 공리가 필요합니다.** ‘기준을 만족하는 것들의 모임’이라고만 하면, 이발사의 역설처럼 자기 자신에게 기준을 적용할 때 모순이 생깁니다.
- **크기를 비교하는 방법은 짝짓기입니다.** 두 집합의 원소를 빠짐없이 하나씩 짝지을 수 있으면(일대일 대응) 크기가 같다고 봅니다.
- **자연수와 정수는 짝지어집니다.** 0을 포함한 자연수에서 $2n \mapsto n$, $2n+1 \mapsto -(n+1)$로 보내면 됩니다. 부분집합인데도 짝이 맞는 것은 무한이기 때문입니다.
- **유리수도 셀 수 있습니다.** 분자와 분모의 합이 같은 분수끼리 대각선으로 묶어 차례로 셉니다. 같은 수가 여러 번 나오는 것은 따로 처리해야 합니다.
- **실수는 셀 수 없습니다.** 0과 1 사이의 실수를 다 늘어놓았다고 가정하고, 대각선의 숫자를 하나씩 바꾼 수를 만들면 목록에 없는 수가 나옵니다(칸토어의 대각화, 귀류법).
- **무한에도 크기의 차이가 있습니다.** 그 사이 크기의 무한이 있느냐는 연속체 가설은, 보통 쓰는 집합론의 공리만으로는 증명도 반증도 할 수 없습니다(괴델 1940, 코헨 1963).
- **수학의 출발점은 공리의 선택입니다.** 평행선 공준을 바꾸면 비유클리드 기하학이 나옵니다. 수학의 명제는 ‘P이면 Q’이고, 가정이 바뀌면 결론도 달라질 수 있습니다.

확인 문제

직접 손으로 해 보면 판서가 다르게 보입니다. 풀이는 책 끝 부록에 있습니다.

문제 1 판서 4의 짝짓기 $2n \mapsto n$, $2n+1 \mapsto -(n+1)$에서 자연수 7과 10은 각각 어떤 정수로 갑니까? 거꾸로, 정수 -5와 4로 오는 자연수는 무엇입니까?

문제 2 양의 유리수를 이렇게 세기로 합니다. 분자와 분모의 합이 작은 대각선부터, 같은 대각선 안에서는 분자가 작은 것부터 셉니다($\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{3}$, …). 판서처럼 $\frac{2}{2}$와 $\frac{1}{1}$같이 값이 같은 분수도 따로 셉니다. 분자와 분모의 합이 5인 분수를 모두 적고, $\frac{3}{2}$가 몇 번째인지 구하세요.

문제 3 0과 1 사이의 실수 목록이 $x_1 = 0.3141\cdots$, $x_2 = 0.2718\cdots$, $x_3 = 0.1414\cdots$, $x_4 = 0.5772\cdots$로 시작한다고 합시다. 판서 8의 규칙(대각선 숫자가 3이면 4, 3이 아니면 3)으로 만든 수 $x = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots$의 처음 네 자리를 구하고, x가 이 네 수 중 어느 것과도 같을 수 없는 이유를 말해 보세요.

> **강의자** 따라 해 보는 것이 중요해요. 노트를 읽으면서 자연수 1부터 10까지, 100까지 정수와 직접 짝지어 본 분이 계셨죠. 구체적인 것을 확인하고 범위를 넓혀 가는 것, 그게 추상으로 넘어가는 중요한 과정입니다.

생각해 볼 질문

판서 13에 적은 질문과, 수업 중 강의자가 남긴 숙제

1. 자연수 집합의 수학적 정의는 무엇일까요? 혹자는 $1, 2, 3, \dots$ 이라고 하시겠지만, '…'이라고 말하면 안 되는 것 아닌가요?
2. 왜 $1 + 1 = 2$일까요? "당연한 걸 왜 물어"라는 불만을 없애려면, 납득할 수 있게 설명하실 수 있나요?
3. 왜 $(-1) \times (-1) = 1$일까요?
4. 기준이 분명하지 않은 모임의 예를 재미 삼아 찾아보세요. 이발사 같은 예가 있으면 함께 이야기해 봅시다.
5. 판서 5의 유리수 세기에 있는 허점을 직접 메워 보세요. 같은 수가 여러 번 나오지 않도록 하려면 어떻게 세면 될까요?

> **강의자** 오늘 이야기한 수학적 논리와 집합론은 수학과에서 한 학기 동안 배우는 과목이에요. 한 학기 내용을 한 주로 줄였으니 빈틈이 있었고, 그건 처음부터 가정한 한계입니다. 전체 구조를 보고 나면 각자 살을 붙여 공부할 때 조금 수월해지리라 생각해요.

다음 강

2강 근의 공식과 대수학, 자연수와 군

어떤 수학자들에게 1545년은 '수학이 시작된 해'입니다. 3차와 4차 방정식의 근의 공식이 이 해에 공표되었기 때문이죠. 그리고 5차 이상의 방정식에는 근의 공식이 없다는 것을 보인 두 젊은이, 아벨과 갈루아를 만납니다.

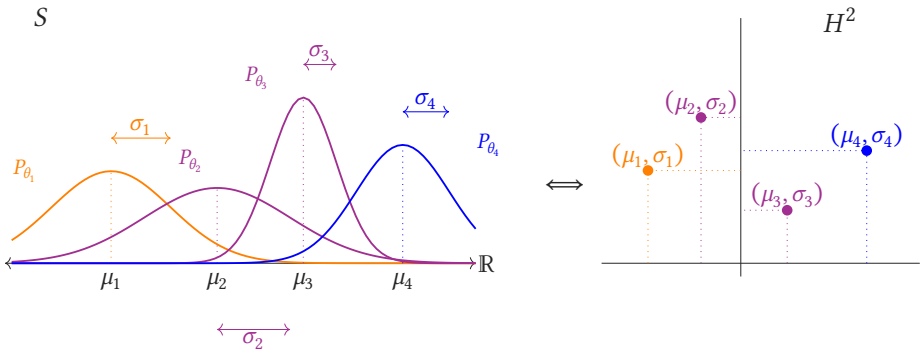
관찰 위에서의 가설검정이 결국에 P_{θ_i}를 선택하는 게 목표라면 수학적인 관점에서는 가능한 P_θ의 후보들을 한 집합으로서 전부 모으는 것이 자연스럽다. 즉 다음의 집합을 생각하자: 1

$$S := \left\{ P_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) : \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0 \right\}$$ 2

이 집합은 (확률밀도) 함수들의 모임이다. 그런데 여기서 각각의 $P_{\mu,\sigma}$는 각 순서쌍 $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$마다 유일하게 정해지므로 집합 S는 집합 $H^2 = \{(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0\}$과 다음의 일대일 대응 관계가 성립한다:

$$P_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \in S \longleftrightarrow (\mu, \sigma) \in H^2$$

그런데 우리는 이때 상반평면 H^2를 단순히 아무 구조도 없는 집합으로서 바라보고 있는 게 아닌, 내적으로 형태를 규정하고 있는 찰흙덩어리 (위상공간)으로서 생각하고 있다. 3


 4

써 보기 판서를 가리고, 이 쪽의 핵심을 자기 말로 적어 보세요.

1강의 질문은 16강에서 이렇게 돌아옵니다

하권 마지막 강, 통계학에 녹아 있는 기하학의 한 펼침면

1 1강 끝 무렵, 평행선 공준을 부정해도 모순 없는 기하학이 생긴다는 이야기를 했죠. 그때 한 줄을 덧붙였습니다. 머신러닝과 통계에서는 확률분포의 모임을 하나의 휘어진 공간으로 본다고요. 하권의 마지막 강에서 그 말을 실제로 풀어냅니다.

2 판서의 S는 정규분포의 밀도함수를 모두 모은 집합입니다. 평균 μ와 표준편차 σ마다 하나씩, 원소 하나가 함수 하나예요. 오늘 배운 '기준을 만족하는 것들의 모임', 바로 그 집합의 언어입니다.

3 (μ, σ)를 상반평면의 점으로 보면 정규분포 하나와 점 하나가 짝지어집니다. 오늘 자연수와 유리수를 짝지은 그 일대일 대응이에요. 이 공간에서 피셔정보로 길이를 재면, 음의 곡률을 가진 쌍곡기하가 나타납니다. 1강에서 만난 비유클리드 기하학의 한 모습이죠.

4 그래서 무엇이 달라질까요? 인공지능 학습의 기본인 경사하강법은 보통 유클리드 내적을 전제로 '가장 가파른 방향'을 잡습니다(9강). 피셔정보로 내적을 바꾸면 그 방향이 달라지고, 이것을 자연경사라고 부릅니다(16강). "무엇을 전제로 답을 구하고 있나요?" 오늘 던진 이 질문이, 학습 알고리즘을 고르는 질문으로 돌아옵니다.

> 집합, 일대일 대응, 공리의 선택. 1강에서 꺼낸 세 도구가 16강까지 쓰입니다. 그 사이의 열네 강이 군과 행렬, 미분과 적분, 곡률을 하나씩 놓아 이 길을 잇습니다.

부록·확인 문제 풀이

각 강 끝 '확인 문제'의 풀이입니다. 먼저 스스로 풀어 본 뒤에 펼쳐 보세요.

1강 집합과 명제, 공리

문제 1 $7 = 2\times 3 + 1$이므로 $-(3+1) = -4$로, $10 = 2\times 5$이므로 5로 갑니다. 거꾸로 $-5 = -(n+1)$이면 $n = 4$이므로 $2\times 4 + 1 = 9$가 -5로 옵니다. 4로 오는 것은 $2\times 4 = 8$입니다.

문제 2 합이 5인 분수는 $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$입니다. 앞선 대각선에 합 2인 것 1개, 합 3인 것 2개, 합 4인 것 3개, 모두 6개가 있습니다. $\frac{3}{2}$는 합 5인 대각선의 세 번째이므로 $6 + 3 = 9$번째입니다. 판서 6에서 짚은 '허점'처럼 값이 같은 분수($\frac{2}{2}$)를 빼고 세면 8번째가 됩니다.

문제 3 대각선 숫자는 x_1의 첫째 자리 3, x_2의 둘째 자리 7, x_3의 셋째 자리 1, x_4의 넷째 자리 2입니다. 규칙에 따라 $b_1 = 4, b_2 = 3, b_3 = 3, b_4 = 3$이므로 $x = 0.4333\cdots$입니다. x는 x_i와 소수점 아래 i번째 자리가 반드시 다르므로 어느 x_i와도 같을 수 없습니다.

열여섯 강의 지도

강마다 하나의 질문에서 출발합니다

상권 · 입문　집합에서 선형대수학까지

1강	**집합과 명제, 공리**	참과 거짓은 정말 분명할까요?
2강	**근의 공식과 대수학, 자연수와 군**	어떤 공식은 있고 어떤 공식은 없다는 건 어떻게 알까요?
3강	**함수의 정의와 군**	함수란 정확히 무엇일까요?
4강	**지수법칙과 역함수**	지수법칙은 왜 덧셈을 곱셈으로 바꿀까요?
5강	**벡터공간과 행렬**	행렬의 곱셈은 왜 그렇게 이상하게 생겼을까요?
6강	**역행렬과 행렬식의 의미**	역행렬은 언제 있을까요? 그 답이 왜 '넓이'일까요?
7강	**선형대수학과 기하학**	각도와 길이는 정말 '그냥' 주어진 걸까요?
8강	**무지개 정리**	벡터의 길이와 각도는 누가 정해 주었을까요?

하권 · 심화　미적분에서 기하와 통계까지

9강	**미분법의 직관과 의미**	미분은 정말 '기울기' 하나로 끝나는 이야기일까요?
10강	**다변수 미분법의 직관적 이해**	평면 위의 함수에서 '기울기'는 무엇일까요?
11강	**미적분학의 기본정리와 적분**	넓이를 재는 일이 왜 미분과 이어질까요?
12강	**다변수 미분법의 직관**	한 점에서 돌고, 한 점에서 터져 나오는 것을 숫자로 잴 수 있을까요?
13강	**다변수 미적분학의 기본정리**	곡선, 곡면, 입체에서도 '안'과 '경계'는 같은 이야기를 할까요?
14강	**가우스곡률과 미분기하**	지구 밖에 나가 보지 않고도 지구가 휘어 있다는 걸 알 수 있을까요?
15강	**리만의 복소함수론과 대수기하**	곡면을 이해하는 일이 다항식을 이해하는 일이라면?
16강	**통계학에 녹아 있는 기하학**	종 모양 그래프들을 모아 놓으면, 그 모임도 하나의 공간이 될까요?

이 책은 이런 분께 맞습니다

학점도 시험도 없이, 스스로 찾아온 어른들의 교실

- 공식 암기로 끝났던 수학을, ‘그래서 이것이 무엇인가’부터 다시 시작하고 싶은 분
- 매일 쓰는 인공지능·데이터·통계 도구 속에 어떤 수학이 들어 있는지 알고 싶은 분
- 인공지능이 내놓은 설계와 분석을 검토하고, 그 결과에 책임을 지고 결정해야 하는 분
- 대학 수학이 집합에서 대학원 문턱까지 어떻게 이어지는지 한 번에 보고 싶은 분

책 정보

구성	상권·입문(1–8강, 290쪽)　하권·심화(9–16강, 282쪽)
판형	170 × 235mm, 왼쪽 쪽에 그날의 판서, 오른쪽 쪽에 그 판서를 두고 한 말
강마다	이 강의 핵심 · 확인 문제(모두 53개, 풀이는 권말 부록) · 생각해 볼 질문
정가	종이책 상권 22,000원 · 하권 24,000원 · 세트 42,000원
전자책 상권 15,000원 · 하권 17,000원 · 세트 29,000원	
지은이	조건희(Geonhee Cho)

이어지는 열다섯 강은 책에서 만나세요

수즐 출판사　https://sujeul-press.com